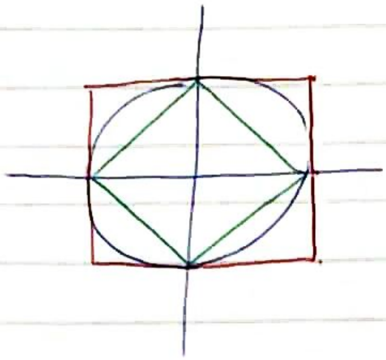



$B_{\rho_p}((0,0),1)$ για $p>2$ , $B_{\rho_p}((0,0),1)$ για $1<p<2$

**Ακολουθίες**: Αν $X$ είναι μη κενό σύνολο ακολουθία στο σύνολο $X$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to X$. Αν συμβολίζεται $f(n)=x_n$ μπορούμε να αναφερόμαστε στην παραπάνω ακολουθία συμβολίζοντας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Τα $x_n$ ονομάζονται όροι της ακολουθίας.

Έτσι $x_1$ είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας
$x_2$ -//- δεύτερος -//- -//-
$x_3$ -//- τρίτος -//- -//-
$\vdots$ $\vdots$
$x_n$ -//- n-οστός -//- -//-

Οι όροι μιας ακολουθίας δεν είναι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους.
πχ: αν $a\in X$ και $x_n=a$ $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε τη σταθερή ακολουθία με τιμή $a$.

**Υπακολουθίες**: Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία και $k_1<k_2<k_3<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ φυσικοί αριθμοί ώστε η ακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ δηλ. η ακολουθία με όρους $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots, x_{k_n}$ λέγεται υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Οι δείκτες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελούν μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "k"] \arrow[dr] & \mathbb{N} \arrow[d, "x"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Η υπακολουθία $(x_{k_n})$ είναι η σύνθεση των συναρτήσεων: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto k_n$ κ' $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$

Για παράδειγμα: αν $k_n = 2n$ $\forall n$ έχουμε την υπακολουθία $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ των αρτίων όρων της $(x_n)$. Ενώ αν $k_n = 2n-1$ $\forall n$ έχουμε την υπακολουθία $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ των περιττών όρων της $(x_n)$

Πρόταση: Αν $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)$ τότε $k_n \geq n$ $\forall n\in$

Απόδειξη

- $k_1 \geq 1$ προφανώς
- Υποθέτουμε ότι $k_n \geq n$
- Έχουμε $k_{n+1} > k_n \geq n$ και άρα αφού $k_{n+1}\in\mathbb{N}$ έχουμε $k_{n+1} \geq n+1$.

Υπενθύμιση: Ακολουθίες στο $\mathbb{R}$

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $x_0\in\mathbb{R}$ λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x_0$ (Συμβ. $x_n \longmapsto x_0$) αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n$ : $n\geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon$

Από τον Απ. Λογ. Ι είναι γνωστά τα εξής:

(i) Το όριο μιας ακολουθίας (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.
   Συμβ: $\lim_n x_n$

(ii) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

(iii) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή.

ΤΟΠ

(iv) Θεώρημα Bolzano - Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ο ορισμός της σύγκλισης μεταφέρεται στον τυχαίο μ.χ. αντικαθιστώντας την απόλυτη τιμή με την μετρική.

Ορισμός: Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $X$ και $x_0 \in X$. Λέμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x_0$ (και συμβολίζουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$: $[n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon]$

Σημείωση: Αν είναι σαφές σε ποιά μετρική αναφερόμαστε μπορούμε να γράφουμε $x_n \to x_0$ αντί για $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα μ.χ. $(X, \rho)$ λέγεται συγκλίνουσα αν υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε: $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$

Παρατήρηση: $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \Longleftrightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0$

Πρόταση: (Μοναδικότητα ορίου)
Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο μ.χ. $(X, \rho)$ και $a, b \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} a$, $x_n \xrightarrow{\rho} b$ τότε $a = b$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $a \neq b$. Τότε $\rho(a,b) > 0$. Θέτω $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2} > 0$

Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$
$x_n \xrightarrow{\rho} b$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, b) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε $n_0 \geq n_1$ άρα $\rho(x_{n_0}, a) < \varepsilon$
και $n_0 \geq n_2$ άρα $\rho(x_{n_0}, b) < \varepsilon$

Τότε $\rho(a,b) \le \rho(a, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, b)$
$= \rho(x_{n_0}, a) + \rho(x_{n_0}, b)$
$< \varepsilon + \varepsilon$
$= 2\varepsilon = \rho(a,b)$

Άρα $\rho(a,b) < \rho(a,b)$ άτοπο
Επομένως, $a=b$

Πρόταση: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $X$ και $x_0 \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Αν $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x_0$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ (1) $\forall n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$ άρα από την (1): $\rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon$. Επομένως, $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x_0$.

Παράδειγμα: Έστω $(X,\rho)$ όπου $\rho$: η διακριτή μετρική στο $X$. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $X$ και $x_0 \in X$.
Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq n_0$ άρα $\rho(x_n, x_0) = 0$ $\forall n \geq n_0$ άρα $x_n = x_0$ $\forall n \geq n_0$. Δηλ. η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή.

Ένας εναλλακτικός συμβολισμός για τις υπακολουθίες:
Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια υπακολουθία σε ένα σύνολο $X$ και $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών συμβολίζοντας $M = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$ την υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να την συμβολίζουμε και $(x_n)_{n\in M}$.

## Ακολουθίες στον ευκλείδειο χώρο ($\mathbb{R}^k$, ρ2)

$\vec{x_n} = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$ $n \in \mathbb{N}$ όπου $x_n^i$ $i = 1, \ldots, k$ οι συντεταγμένες του $\vec{x_n}$. Έτσι σε κάθε ακολουθία $(\vec{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^k$ αντιστοιχούν k-ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$

Πρόταση: Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$
$\vec{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$ και $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k)$.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα (Τ.α.ε.ι)
i) $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$, $n\in\mathbb{N}$
ii) $x_n^i \to x_0^i$ για κάθε $i=1,\dots,k$

Απόδειξη: (i) ⇒ (ii). Έστω $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$ και θα δ.ο ισχύει $x_n^i \to x_0^i$ για κάθε $i\in\{1,\dots,k\}$. Έστω $i_0\in\{1,\dots,k\}$ θα δ.ο $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$. Έστω $\varepsilon>0$.
Εφόσον $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}_0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε:
$\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < \varepsilon \quad \forall n\geq n_0$

$$\rho_2(\vec{x}_n,\vec{x}_0) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2\right)^{1/2}$$

έτσι: $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| \leq \rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < \varepsilon \quad \forall n\geq n_0$

Επομένως $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$

(ii) ⇒ (i) Υποθέτουμε ότι $x_n^i \to x_0^i$ για κάθε $i=1,\dots,k$
Θα δ.ο. $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$. Έστω $\varepsilon>0$. Για κάθε $i=1,\dots,k$, αφού $x_n^i \to x_0^i$ υπάρχει $n_i\in\mathbb{N}$ ώστε
$|x_n^i - x_0^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \quad \forall n\geq n_i$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,\dots,n_k\}$. Τότε για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει: $n\geq n_i \ \forall i=1,\dots,k$ άρα:
$|x_n^i - x_0^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \quad i=1,\dots,k$

άρα $$\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

Επομένως: $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$

## Θεώρημα (Bolzano - Weierstrass στον $\mathbb{R}^k$)

Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

[Σημείωση: Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ λέγεται φραγμένη αν $\exists M > 0$ ώστε: $\|\vec{x_n}\|_2 \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$]

Απόδειξη: Για $k=1$ είναι το γνωστό θεώρημα στο $\mathbb{R}$. Το δείχνουμε για $k=2$. Έστω $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$: $\vec{x_n} = (x_n^1, x_n^2)$
$|x_n^1| \le \|\vec{x_n}\|_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ άρα η $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φρ. ακολ. πραγ. αριθμών. Από θεώρημα B-W στον $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλ. $\exists (x_{k_n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x_0^1 \in \mathbb{R}$ ώστε $\boxed{x_{k_n}^1 \to x_0^1}$

Η $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ άρα και η $(x_{k_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι -//-. Από θεωρ. B-W υπάρχει συγκλίνουσα υπακολ. $(x_{k_n}^2)$ αυτής δηλ. $\exists x_0^2 \in \mathbb{R}$ ώστε:
$x_{k_n}^2 \to x_n^2$

(1) $\Rightarrow x^1_{k_{\ell_n}} \to x_0^1$ (3) (διότι η $x^1_{k_{\ell_n}}$ είναι υπακολ. της $(x^1_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$)

(2),(3) $\Rightarrow \vec{x}_{k_{\ell_n}} \xrightarrow{P_2} (x_0^1, x_0^2)$

Προηγ. προτ.

Γενική Περίπτωση: Έστω $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$. $\vec{x_n} = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$. Για κάθε $i=1,\ldots,k$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$ $|x_n^i| \leq \|\vec{x_n}\|_2$ άρα κάθε $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη $i=1,\ldots,k$. Αφού η $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολ. στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $M_1$ άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε η $(x_n^1)_{n\in M_1}$ να είναι συγκλίνουσα. Η $(x_n^2)_{n\in M_1}$ είναι φραγμένη ακολ. στο $\mathbb{R}$, άρα $\exists$ $M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ $M_2$ άπειρο ώστε $(x_n^2)_{n\in M_2}$ συγκλίνουσα. Η $(x_n^3)_{n\in M_2}$ είναι φρ. ακ. στο $\mathbb{R}$ άρα $\exists M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$

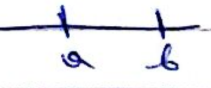
$M_3$ άπειρο ώστε $(x_n)_{n\in M_3}$ συγκλίνουσα

Μετά από $k$-βήματα έχουμε επιλέξει:
$M_k \subset M_{k-1} \subset \ldots \subset M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ ώστε:
$(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα $\forall\, i=1,\ldots,k$.

Θέτοντας $M = M_k$ έχουμε ότι για κάθε $i=1,\ldots,k$ η $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι υπακ. της συγκλίνουσας $(x_n^i)_{n\in M_i}$. Από την προηγ. πρόταση η $(\vec{x_n})_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα υπακ. της $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. και $A \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$. Ορίζουμε τη διάμετρο του $A$ (διαμ(A) ή diam(A))
$\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y),\ x\in A,\ y\in A\}$ (όπου το sup ενός όχι άνω φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι $+\infty$)

Παραδείγματα: 1) Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Αν $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ $\text{diam}([a,b]) = \sup\{|x-y|,\ x,y\in[a,b]\}$
$= b-a$



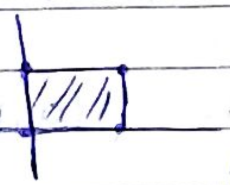
$\longrightarrow$ D

$diam((a,b)) = b-a$
$diam((a,b]) = b-a$
$diam([a,b)) = b-a$
$diam([a,+\infty)) = +\infty$
$diam((-\infty,a]) = +\infty$

2) Αν $(X,\rho)$ όπου $\rho$ η διακριτή μετρική στο $X$ και $\emptyset \neq A \subseteq X$

$$diam(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ είναι μονοσύνολο} \\ 1, & \text{αν το } A \text{ έχει τουλ. 2 στοιχεία} \end{cases}$$

3) $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$
$A = [0,1] \times [0,1]$
$B = B_{\rho_2}((0,0),1)$

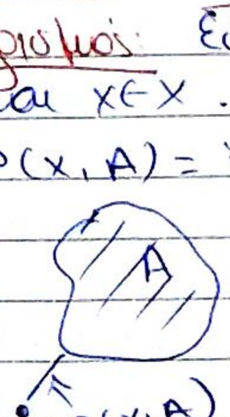


$diam\, A = \sqrt{2}$
όπου $B = \sup\{\rho_2(x,y), x,y \in B\}$

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $A$ ενός μ.χ. $(X,\rho)$ λέγεται φραγμένο αν $A \neq \emptyset$ ή $A = \emptyset$ $diam(A) < +\infty$
[ ⟺ $\exists\, c \geq 0$ $\rho(x,y) \leq c$ $\forall x,y \in A$ ]

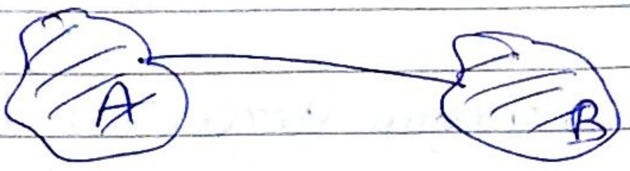
Απόσταση σημείου από σύνολο και απόσταση συνόλων

Ορισμός: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ και $x \in X$. Η απόσταση του $x$ από το $A$:
$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$




[Η εικόνα αντιστοιχεί στον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$

**Ορισμός:** Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. και $A, B \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ορίζουμε την απόσταση του $A$ από το $B$ να είναι:
$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\}$




**Παρατήρηση:** $\rho(x,A) = \rho(\{x\}, A)$

**Πρόταση:** Έστω $(X,\rho)$ μ.χ $A \subseteq X$ $A \neq \emptyset$ τότε για κάθε $a, b \in X$ ισχύει: $|\rho(a,A) - \rho(b,A)| \leq \rho(a,b)$

**Αποδ:** Για κάθε $x \in A$ : $\rho(a,A) \leq \rho(a,x) \leq \rho(a,b) + \rho(b,x)$
$\forall x \in A$

Άρα $\rho(a,A) - \rho(a,b) \leq \inf\{\rho(b,x), x \in A\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(a,A) - \rho(a,b) \leq \rho(b,A) \Rightarrow \rho(a,A) - \rho(b,A) \leq \rho(a,b)$

Ομοίως $\rho(b,A) - \rho(a,A) \leq \rho(b,a) = \rho(a,b)$

Επομένως $|\rho(a,A) - \rho(b,A)| \leq \rho(a,b)$